# SPIELTHEORIE

- Modellbildung zur strategischen Entscheidungsfindung
- Im Spannungsfeld zwischen Kooperation und Wettbewerb

**Prof. Dr. Martin Schottenloher**

Mathematisches Institut, LMU München

München, 12. Juli 2007 - Studienstiftung

## Inhalt


1. Spieltheorie – interaktive Entscheidungstheorie
2. Beispiel: Das Einsatzspiel
3. Normalform und Nash-Gleichgewicht
4. Spiele in extensiver Form (Skizze)
5. Experimentelle Spieltheorie (Skizze)
6. Iterierte Spiele, evolutorische Spiele (Skizze)
7. Anwendung: Gestaltung einer Kooperation (Beispiel)

## Inhalt


1. Spieltheorie – interaktive Entscheidungstheorie
2. Beispiel: Das Einsatzspiel
3. Normalform und Nash-Gleichgewicht
4. Spiele in extensiver Form (Skizze)
5. Experimentelle Spieltheorie (Skizze)
6. Iterierte Spiele, evolutorische Spiele (Skizze)
7. Anwendung: Gestaltung einer Kooperation (Beispiel)

# 1. Spieltheorie - Einleitung

- Die Spieltheorie
- … ist eine ***mathematische Disziplin.***
- … hat ihren Ursprung tatsächlich in der ***strategischen Analyse*** von Spielen wie Schach u.a.
- … hat in ihrer modernen Ausprägung allerdings wenig mit Spielen zu tun. Stattdessen:

# 1. Spieltheorie - Einleitung

- Die Spieltheorie analysiert das ***Entscheidungsverhalten*** von Akteuren in Situationen, in denen der erzielbare Nutzen eines jeden Einzelnen von den Entscheidungen der anderen Beteiligten abhängt. Also:
- Entscheidungen nach ***rationaler Analyse*** unter Berück-sichtigung der möglichen Entscheidungen der anderen, insofern ***interaktiv.***
- Ergebnis der Analyse: Optimale Entscheidungen gibt es und sie können ***berechnet*** werden!

## 1. Spieltheorie - Einleitung

- Ziele der Spieltheorie:
  - Sichere Voraussagen bei Vorgabe der Spielregeln: Welche Entscheidungen werden gefällt? Was ist die ***beste Strategie***?
  - Änderung der Rahmenbedingungen (d.h. der Spielregeln), um gegebenenfalls zu gewünschten Resultaten zu kommen: ***Gestaltung***
  - … mit ***mathematischen Methoden***: Formeln, Gleichungen, Zahlen.

# 1. Spieltheorie - Einleitung

- *Game Theory focusses on finding the right strategy and making the right decisions.'*
  (Brandenburger / Nalebuff in ,*Co-opetition'*)

# 1. Spieltheorie - Einleitung

- *Game Theory focusses on finding the right strategy and making the right decisions.‘* (Brandenburger / Nalebuff in *‚Co-opetition‘)*

- Anwendungen in: ***Ökonomie***, Sozialwissenschaften, Psychologie, Biologie, Physik, Chemie, Mathematik, Informatik, ***Politik***, …

## 1. Spieltheorie - Einleitung

Nach diesen Ausführungen ein erstes Spiel:

Das 80%-Spiel:

- **Jeder** Teilnehmer wählt eine natürlichen Zahl x zwischen 0 und 100 und gibt diese bekannt.
- **Gewonnen** hat, wer mit seiner gewählten Zahl 80 % des Durchschnitts der genannten Zahlen am nächsten kommt.

- Welche Zahl wählen Sie?

  Zum Beispiel bei einem Einsatz von 1 €.

## Inhalt


1. Spieltheorie – interaktive Entscheidungstheorie
2. Beispiel: Das Einsatzspiel
3. Normalform und Nash-Gleichgewicht
4. Spiele in extensiver Form (Skizze)
5. Experimentelle Spieltheorie (Skizze)
6. Iterierte Spiele, evolutorische Spiele (Skizze)
7. Anwendung: Gestaltung einer Kooperation (Beispiel)

## 2. Einsatzspiel

Beispiel: Ausführliche Beschreibung und Analyse eine konkreten Modells „***Einsatzspiel***“

Das Spiel und die Regeln:

**Vier** Spieler können jeweils bis zu 1000 € in einen gemeinsamen „Topf“ investieren.

Die Summe der Investitionen wird verdoppelt und zu gleichen Teilen auf die vier Spieler verteilt.

***Was ist die richtige Strategie?***

- für einen optimalen Gewinn?

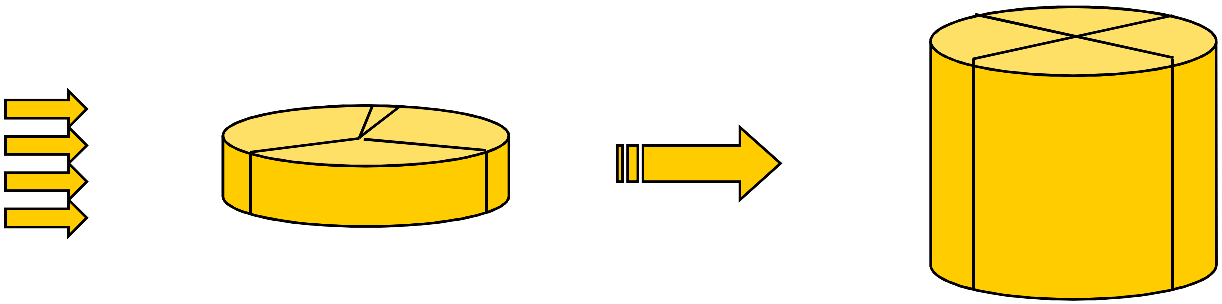
## 2. Einsatzspiel

Das Spiel und die Regeln:

**Vier** Spieler können jeweils bis zu 1000 € in einen gemeinsamen „Topf“ investieren.

Die Summe der Investitionen wird verdoppelt und zu gleichen Teilen auf die vier Spieler verteilt.

***Typisch für Kooperationen, Vereine, Partnerschaften!***



## 2. Einsatzspiel

- Was ist die optimale Strategie? Was wählen Sie?

- Szenario 1: Jeder der vier Spieler setzt 1.000 € ein. Also stehen 4 x 1.000 x 2 = 8000 zur Verteilung an, jeder Spieler erhält 2.000 € und hat einen

  ***Gewinn*** von 1.000 €.

## 2. Einsatzspiel

Szenario 2: Nur ein Spieler – Spieler 1 – setzt 1.000 €, die anderen setzen gar nichts ein. Es werden 2.000 € verteilt:

- Spieler 1 erhält 500 € und hat einen ***Verlust*** von 500 €.
- Die anderen drei Spieler machen je 500 € ***Gewinn***.

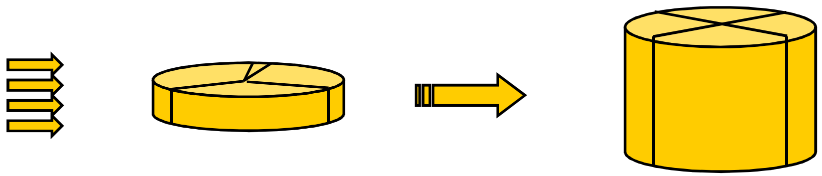
## 2. Einsatzspiel. Die Formel:

- Der Einsatz von Spieler 1 werde mit $e$ bezeichnet, die Summe der Einsätze der restlichen drei Spieler mit $s$.
- Dann ist $s + e$ der Gesamteinsatz, der nach den Regeln verdoppelt ( $= 2(s + e)$ ) und auf die vier Spieler gleichmäßig verteilt wird.
- Jeder erhält also $2(s + e)/4 = \frac{1}{2}(s + e)$ €.
- Der ***Gewinn (Nutzen)*** $u(e)$ von Spieler 1 in Abhängigkeit vom Einsatz $e$ ist also $u(e) = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}e - e = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}(s - e)$:

$$\boxed{u(e) = \frac{1}{2}(s - e)}$$

## 2. Einsatzspiel

Die beste Strategie in diesem Spiel:



**Gar nichts investieren!**

## 2. Einsatzspiel

Paradox?

- Wenn jeder Spieler sich für diese rationale Strategie (des ***Trittbrettfahrers***) entscheidet, ist sein Gewinn 0, obwohl jeder bei einer ***kooperativen Strategie*** 1.000 € gewinnen könnte, nämlich wenn alle den vollen Einsatz investierten.

- Spannung: Wettbewerb ←\ /→ Kooperation

## 2. Einsatzspiel

- Das Beispiel ist sehr einfach und es muss für ernste Anwendungen modifiziert werden!

- Aber es zeigt: Ohne zusätzliche Strukturen oder Bindungen (d.h. Regeln des Spiels) kann unter ***rationalen*** Gesichtspunkten ***gar keine Kooperation*** entstehen.

- Beispiel ***Brutal***: Jeder wird gezwungen, vollen Einsatz zu geben. (Mafia)

## 2. Einsatzspiel

- Das Beispiel „Einsatzspiel“ ist eine Variante des bekannten ***Gefangenendilemmas***.

## Inhalt

1. Spieltheorie – interaktive Entscheidungstheorie
2. Beispiel: Das Einsatzspiel
3. Normalform und Nash-Gleichgewicht
4. Spiele in extensiver Form (Skizze)
5. Experimentelle Spieltheorie (Skizze)
6. Iterierte Spiele, evolutorische Spiele (Skizze)
7. Anwendung: Gestaltung einer Kooperation (Beispiel)

## 3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

In diesem Abschnitt werden Grundbegriffe bereitgestellt.

- Spieltheorie als Teil der ***Mathematik*** am Beispiel der Spiele in ***Normalform***. Der einfachsten Form, Spiele mathematisch darzustellen.

## 3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

- Ein Spiel in ***Normalform***, besteht aus
  - einer endlichen Menge M von ***Spielern***,
  - zu jedem Spieler k aus M eine Menge $S_k$ von ***Strategien*** und
  - zu jedem Spieler k aus M eine ***Nutzenfunktion*** $u_k$ , die jeder ***Strategiekombination*** $s = (s_1,s_2, \dots ,s_N)$ mit $s_k$ aus $S_k$ eine reelle Zahl $u_k(s)$ festlegt (das ist das ‚Gewinnergebnis' im Falle, dass s gespielt wird).

## 3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

- Spielverlauf:
- Jeder Spieler entscheidet sich in seinem Zug für eine Strategie $s_k$ aus seiner Strategiemenge $S_k$, ohne zu wissen, was die anderen ziehen.
- Damit ist das Spiel auch schon zuende.
- Dann ist $s = (s_1, s_2, \ldots, s_N)$ die gespielte Strategiekombination und für jeden Spieler k ist $u_k(s)$ sein Nutzen, also das Spielergebnis.

## 3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

Beispiel Einsatzspiel:

- $M = \{1,2,3,4\}$ ist die Menge der Spieler
- Die Strategiemengen sind für jeden gleich:
  $$S_k = S = \{0,1,2, \dots ,1.000\}$$
- Die Nutzenfunktion ist, wie oben gezeigt
  $$u_k(s_1, s_2, s_3, s_4) = ½ (s_1+s_2+s_3+s_4) – s_k ,$$
  also für Spieler 1 :
  $$u_1(s_1, s_2, s_3, s_4) = ½ (s_2+s_3+s_4) – ½ s_1 \dots$$

## 3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

Beste Antwort:

- Im Falle von 2 Spielern M = {1,2}:
- Vorgegeben sei $s_2$.
  Beste Antwort auf $s_2$ ist jede Strategie $s_1^*$ die stets

$$\boxed{u_1\,(s_1^*, s_2) > u_1\,(s_1, s_2) \text{ oder } u_1\,(s_1^*, s_2) = u_1\,(s_1, s_2)}$$

für beliebige Strategien $s_1$ erfüllt.

## 3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

Nash-Gleichgewicht:

- Im Falle von 2 Spielern M = {1,2}:

- $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ ist Nash-Gleichgewicht, wenn $s_1^*$ beste Antwort aus $s_2^*$ und zugleich $s_2^*$ beste Antwort auf $s_1^*$ ist.

- Dann ergibt sich für keine Seite ein Vorteil durch Abweichen vom Nash-Gleichgewicht.

## 3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

Analog für n Spieler:

- Definition: Zu einem Spiel in Normalform ist eine Strategiekombination $s^*$ ein ***Nash-Gleichgewicht***, wenn Folgendes zutrifft:

  Für jeden Spieler k und für alle Vergleichsstrategien

  $s_k$ aus $S_k$ gilt:

$$\boxed{u_k(s^*) > u_k(s_k, s^*_{-k}) \text{ oder } u_k(s^*) = u_k(s_k, s^*_{-k}) \, .}$$

## 3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

- Ein ***Nash-Gleichgewicht*** ist also Kandidat für eine ***optimale Strategie***.

- Abweichen von Nash-GG führt zu keiner Verbesserung des Spielergebnisses.

## 3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

- **Theorem (Nash 1950):** Ein ***Nash-Gleichgewicht*** existiert immer dann, wenn die Strategiemengen $S_k$ konvexe, kompakte Teilmengen eines euklidischen Raumes und die Nutzenfunktionen $u_k$ affin-linear sind.

- Insbesondere hat ein ***endliches Normalformenspiel*** immer ein Nash-Gleichgewicht in ***gemischten*** Strategien.

## 3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

- ***Nash-Gleichgewichte*** können konkret berechnet werden.
  Ähnlich wie Minima, Maxima bei Kurvendiskussionen.
  (Nobelpreis in den 90ern)

- Allerdings kann der rechnerische Aufwand erheblich sein.
  Die numerische Mathematik hilft.

## 3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

- Für unser Einsatzspiel gilt wegen
  $$u_1(s_1, s_2, s_3, s_4) = ½ (s_2+s_3+s_4) – ½ s_1$$
- Auf jede Strategiewahl der anderen drei ist die beste Antwort des ersten Spielers immer die Wahl
  $$s_1^* = e = 0.$$
- Das gilt analog für die anderen, daher ist (0,0,0,0) das eindeutig bestimmte Nash-Gleichgewicht.

## 3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

- In einem Spiel kann es mehrere ***Nash-Gleichgewichte*** geben.
- In diesem Falle erfordert die Suche nach der optimalen Strategie eine weitere mathematische Analyse.

## Inhalt

1. Spieltheorie – interaktive Entscheidungstheorie
2. Beispiel: Das Einsatzspiel
3. Normalform und Nash-Gleichgewicht
4. Spiele in extensiver Form (Skizze)
5. Experimentelle Spieltheorie (Skizze)
6. Iterierte Spiele, evolutorische Spiele (Skizze)
7. Anwendung: Gestaltung einer Kooperation (Beispiel)

## 4. Spiele in extensiver Form

- Normalform: Jeder hat einen Zug und alle Züge müssen gleichzeitig erfolgen.
- Es geht jetzt darum, Spiele darzustellen, in denen mehrfach und auch nacheinander gezogen werden kann.
- Der Spielverlauf wird durch einen ***Graphen*** dargestellt. Es muss eine ein zusammenhängender Graph ohne Schleifen sein: Ein so genannter Baum!

## 4. Spiele in extensiver Form

- Der Spielegraph besteht aus der Menge K der ***Knoten*** und der Menge T der ***Kanten***.
- Die Knoten mit nur einer Kante sind die ***Endknoten***.
- Ein Knoten w aus K ist ausgezeichnet als ***Anfangsknoten***, w gehört nicht zur Menge Z der Endknoten.
- $E = K \setminus Z$ ist die Menge der Entscheidungsknoten.
- Jedem Entscheidungsknoten v aus E ist ein Spieler P(v) zugeordnet, der in v als Strategiemenge die Menge S(v) der Kanten hat, die von v ausgehen.
- Die Nutzenfunktion ist eine Funktion $u: Z \rightarrow R^N$.

## 4. Spiele in extensiver Form

- Spielverlauf!
- Wieder Nash-Gleichgewicht wohldefiniert.
- Verfeinerungen des Begriffs Nash-GG nötig. Intensive Beschäftigung der Spieltheorie mit diesem Thema.

## Inhalt

1. Spieltheorie – interaktive Entscheidungstheorie
2. Beispiel: Das Einsatzspiel
3. Normalform und Nash-Gleichgewicht
4. Spiele in extensiver Form (Skizze)
5. Experimentelle Spieltheorie (Skizze)
6. Iterierte Spiele, evolutorische Spiele (Skizze)
7. Anwendung: Gestaltung einer Kooperation (Beispiel)

## 5. Experimentelle Spieltheorie

- Spiel 80%
  - Rationale Überlegungen ergeben, dass x = 0 oder x = 1 ***Nash-Gleichgewicht*** ist (abhängig von der Anzahl der Spieler).
  - Umfrage hat ergeben: ….
  - Das Resultat von typischen Spielen ist ein Durchschnitt zwischen 20 bis 40.

## 5. Experimentelle Spieltheorie

- Einsatzspiel:
  - Das eindeutig bestimmte Nash-Gleichgewicht ist „Nichts investieren“.
  - Die Voraussagen waren hier?

## 5. Experimentelle Spieltheorie

- Ultimatumspiel: Verteilung von 100 Einheiten (z.B. 100 € oder Einheiten à 1.000 €).
  - Voraussagen?
  - Das eindeutig bestimmte Nash-Gleichgewicht ist „1 anbieten“.

## 5. Experimentelle Spieltheorie

- Erklärungen:
  - Modelle nicht komplex genug: Zusatzüberlegungen und Kooperationen nicht berücksichtigt.
  - Handeln Menschen und andere Akteure (z.B. in der Biologie) wirklich rational? Homo Economicus.
  - Eingeschränkte Rationalität. Nicht berechenbar; Grenzen der Ermittlung; Erfahrungen; Emotionen; Normen; Altruismus; …
- Neue Entwicklungen in Ökonomie und Soziologie !

## Inhalt


1. Spieltheorie – interaktive Entscheidungstheorie
2. Beispiel: Das Einsatzspiel
3. Normalform und Nash-Gleichgewicht
4. Spiele in extensiver Form (Skizze)
5. Experimentelle Spieltheorie (Skizze)
6. Iterierte Spiele, evolutorische Spiele (Skizze)
7. Anwendung: Gestaltung einer Kooperation (Beispiel)

## 6. Iterierte Spiele

- Es geht um ein festes Normalformenspiel, das wiederholt gespielt wird, und bei dem die Zukunft mit einem ***Diskontfaktor*** $\delta$ versehen wird: $0 < \delta < 1$.
  - (Fischhändler)
- Im Falle von m „Runden“ mit den Strategiekombinationen s(0), s(1), … ,s(m) ist der Nutzen jetzt

$$u(s(0), s(1), \dots ,s(m)) = u(s(0)) + \delta u(s(1)) + \delta^2 u(s(2)) + \dots \delta^m u(s(m))$$

## 6. Iterierte Spiele

- Steht die Anzahl der Runden, die gespielt werden, von vornherein fest, so entstehen keine neuen Nash-Gleichgewichte. In jeder Runde wird s(k) ein Nash-Gleichgewicht sein müssen, damit die ganze Folge im iterierten Spiel ein Nash-Gleichgewicht sein kann.
- Folgerung: Schachspiel ist determiniert (Zermelo 1912).
- Eine unbestimmte Anzahl von Runden, wie sie der Realität entsprechen, wird modelliert durch unendliche viele Runden.
- Ergibt viele neue (und realistische) Nash-Gleichgewichte.

# 6. Evolutorische Spiele

- ***Populationen*** treten gegeneinander an. Die verschiedenen Spezies spielen beim zufälligen Aufeinandertreffen immer dasselbe Spiel mit derselben Strategie. Spezies = Strategie.
- Im Ergebnis werden ***stabile Gleichgewichtslagen*** von Strategien asymptotisch angenähert. Diese können berechnet werden.
- Modellierung aus durch ***Evolutionsgleichungen***. Damit Teil der dynamischen Systeme und der Theorie des Chaos.

## Inhalt


1. Spieltheorie – interaktive Entscheidungstheorie
2. Beispiel: Das Einsatzspiel
3. Normalform und Nash-Gleichgewicht
4. Spiele in extensiver Form (Skizze)
5. Experimentelle Spieltheorie (Skizze)
6. Iterierte Spiele, evolutorische Spiele (Skizze)
7. Anwendung: Gestaltung einer Kooperation (Beispiel)

## 7. Anwendungen der Spieltheorie

Zum Beispiel:

Im Falle von ***Kooperationen***, z.B. unternehmensübergreifende Kooperationen oder Zusammenarbeit in einem Team, in einem Verein, Sozietät, etc. … :

## 7. Anwendungen der Spieltheorie

Die Gestaltung (***Design***) der Partnerschaftsstruktur, insbesondere zur Förderung von

- ***Einsatzbereitschaft***
- ***Vertrauen*** (& Vertrauen in das Verhalten der Partner)
- Normen (des Verhaltens)
- Werte

kann sich spieltheoretischer Modelle bedienen.

## 7. Anwendungen der Spieltheorie

In einem spieltheoretischen Modell lassen sich diese so genannten „weichen“ Faktoren, Strukturen und Attribute in Zahlen und Gleichungen gießen und dann numerisch optimieren.

# 7. Anwendungen: Einsatzbereitschaft

- Bei unserem „Einsatzspiel“ (welches Kooperation modelleiert) lässt sich ein ***Zusatznutzen*** durch ***Modifikation des Modells*** (also der Spielregeln, hier der Nutzenfunktion u) einbeziehen:

## 7. Anwendungen: Einsatzbereitschaft

- Der Nutzen (Gewinn) des Spielers 1 war in Abhängigkeit von seinem Einsatz e: $u(e) = \frac{1}{2}(s - e)$.
- Bewertet man den Zusatznutzen Z(e) beim Einsatz e als $Z(e) = e$, so ist der neue Nutzen $u^*$

$$u^*(e) = u(e) + Z(e) = \tfrac{1}{2}(s - e) + e =$$
$$= \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}e + e = \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}e).$$

- Also $\boxed{u^*(e) = \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}e}$ ist der ***Nutzen im neuen Spiel*** !

## 7. Anwendungen: Einsatzbereitschaft

- Dieser neue Nutzen $u^*(e) = ½s + ½e$ ist maximal bei dem Einsatz von 1000 € . Beste Antwort auf s ist also 1000. Das ist die ***optimale*** Strategie!

In dem neuen Spiel gilt also anders als zuvor:

**Die beste Entscheidung ist der Höchsteinsatz !**

## 7. Anwendungen: Einsatzbereitschaft

- ***Rationales*** Entscheiden steht einem hohen Einsatz oft entgegen (wie in unserem simplen Einsatzspiel).

- Die Einsatzbereitschaft steigt beispielsweise durch
  - ***Zusatznutzen*** (etwa Erwerb von Know-How, gerade bei ***Innovationen***)
  - ***Vertrauen*** (& Vertrauen in den Einsatz der Partner)
  - Gruppendruck oder Verhaltensnormen
  - Informationsstatus
  - Kulturelle Gegebenheiten, Werte

## 7. Anwendungen: Vertrauen

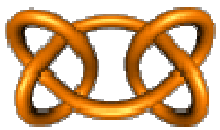
- Ähnlich kann man die positive Wirkung von ***Vertrauen***, Gruppendruck etc. prinzipiell in Gleichungen ausdrücken.
- ***Vertrauen*** steigert die Einsatzbereitschaft.
- Kooperationen müssen daher so gestaltet werden, dass das Vertrauen gefördert wird, z.B. durch
  - Kommunikation
  - Transparenz der Ziele, Strukturen und Aktionen
  - Benutzung von Normen, Werten und kulturellen Eigenheiten

## 7. Anwendungen: Vertrauen

- Studien und Experimente zeigen, dass Vertrauen sich dynamisch verändert. Exper
- Diese Dynamik kann in ***Evolutionsgleichungen*** spieltheoretischer Modelle eingefangen werden.
- Die Analyse dieser Gleichungen führt zu Verbesserungs-vorschlägen zur Struktur, also wieder:

- ***Spieltheorie ist Werkzeug zur Gestaltung von Kooperationen.***

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!



12. Juli 2007

**Martin.Schottenloher@Mathematik.Uni-Muenchen.de**

# 1. Spieltheorie - Einleitung

Erfolgreiche, konkrete Anwendungen in der Wirtschaft:

- ***Verhandlungen*** z.B. über die Verteilung von Wirtschaftsgütern (auch politische Verhandlungen)
- ***Auktionen*** (z.B. auch ebay)
- ***Preisbildung*** bei gleichartigen Produkten (Oligopol), z.B. Preisgestaltung der Mobiltelefontarife
- ***Kartellabsprachen***
- ***Kontrollrechnungen*** der Regulierungsbehörden
- ***Preisfluktuationen, Aktienkurse***
- ***Netzwerke***